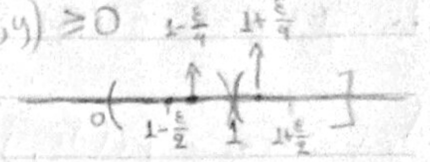
ν.δ.ο. $\rho\big((0,1),(1,2]\big)=0$ στον $(\mathbb{R},|\ |)$

Ξέρω ότι ισχύει (*): $\rho(A,B)=\inf\limits_{(x,y)\in A\times B}\rho(x,y)\geq 0$



Έστω $\rho\big((0,1),(1,2]\big)=\varepsilon>0$

Παρατηρώ ότι: $1+\frac{\varepsilon}{4}\in(1,2]$ και $1-\frac{\varepsilon}{4}\in(0,1)$

$\rho(1+\frac{\varepsilon}{4},1-\frac{\varepsilon}{4})=\left|1+\frac{\varepsilon}{4}-(1-\frac{\varepsilon}{4})\right|=\frac{\varepsilon}{2}$

αφού ισχύει η (*) έχω: $\rho\big((0,1),(1,2]\big)\leq\rho\left(1+\frac{\varepsilon}{4},1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\Leftrightarrow$
$\varepsilon\leq\frac{\varepsilon}{2}$ ΑΤΟΠΟ

άρα $\rho\big((0,1),(1,2]\big)=0$

Παρατήρηση: Στον διακριτό μ.χ. έχουμε:
$\rho\big((0,1),(1,2]\big)=\inf\{\rho(x,y): x\in(0,1)\wedge y\in(1,2]\}\overset{x\neq y}{=}\inf\{1\}=1$

Στον καρτ. μ.χ. των μ.χ. E_i,ρ_i με $i=1,2,\dots,n$ (E,ρ) έχω: $a=(a_1,\dots,a_n)\in E$. Ν.δ.ο.:

i) $B(a_1,\frac{r}{\sqrt{n}})\times\dots\times B(a_n,\frac{r}{\sqrt{n}})\subseteq B(a,r)$ με $r>0$

ii) $B(a,r)\subseteq B(a_1,r_1)\times\dots\times B(a_n,r_n)$ με $r=\min\{r_1,\dots,r_n\}$

Απόδειξη Άσκησης

i) Έστω x τυχόν με $x\in B(a_1,\frac{r}{\sqrt{n}})\times\dots\times B(a_n,\frac{r}{\sqrt{n}})$ με $x=(x_1,\dots,x_n)$

τότε $\left.\begin{cases}x_1\in B(a_1,\frac{r}{\sqrt{n}})\\ \cdots\cdots\\ x_n\in B(a_n,\frac{r}{\sqrt{n}})\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}\rho_1(x_1,a_1)<\frac{r}{\sqrt{n}}\\ \cdots\cdots\\ \rho_n(x_n,a_n)<\frac{r}{\sqrt{n}}\end{cases}\right\}$ τετραγωνίζω $\Rightarrow$ και προσθέτω κατά μέλη

$\Rightarrow\rho_1^2(x_1,a_1)+\dots+\rho_n^2(x_n,a_n)<n\cdot\frac{r^2}{n}=r^2\xrightarrow[\text{ρίζα}]{\text{βάζω}}\rho(x,a)<r\Rightarrow x\in B(a,r)$

ii) x τυχόν, $x\in B(a,r)$ τότε $\rho(x,a)<r\Rightarrow$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}\left.\begin{cases}\rho_1(x_1,a_1)<r\leq r_1\\ \cdots\cdots\\ \rho_n(x_n,a_n)<r\leq r_n\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}x_1\in B(a_1,r_1)\\ \cdots\cdots\\ x_n\in B(a_n,r_n)\end{cases}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow(x_1,\dots,x_n)\in B(a_1,r_1)\times\dots\times B(a_n,r_n)$

(*): $\rho_1(x_1,a_1)=\sqrt{\rho_1^2(x_1,\rho_1)}\leq\sqrt{\rho_1^2(x_1,\rho_1)+\dots+\rho_n^2(x_n,a_n)}=\rho(x,a)$

Άρα $\rho_i(x_i,a_i)\leq\rho(x,a)$ με $i=1,2,\dots,n$

(10)

ν.δ.ο. ισχύει $\rho(x,y) \le \rho_1(x_1,a_1)+\dots+\rho_n(x_n,a_n) \iff$

$\sqrt{\rho_1^2(x_1,a_i)+\dots+\rho_n^2(x_n,a_n)} \le \rho_1(x_1,a_1)+\dots+\rho_n(x_n,a_n) \xrightarrow[\text{τετράγωνο}]{\text{υψώνω στο}}$

$\rho_1^2(x_1,a_i)+\dots+\rho_n^2(x_n,a_n) \le \left(\rho_1(x_1,a_1)+\dots+\rho_n(x_n,a_n)\right)^2$

Παρατηρώ ότι ισχύει.

Άρα ενώ $\rho_i(x_i,y_i) \le \rho(x,y)$ με $i=1,2,\dots,n$ ισχύει και αυτό: $\rho(x,y) \le \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i,a_i)$

$\rho((x,y),(z,w)) = \sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2}$

Στην προηγούμενη άσκηση για $n=2$ και έχω:

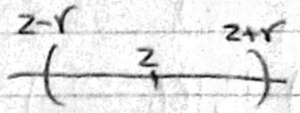
$$B\left(a_1,\frac{r}{\sqrt2}\right)\times B\left(a_2,\frac{r}{\sqrt2}\right) \subseteq B\left((a_1,a_2),r\right)$$

για $a_1=a_2=0$ έχω:

$$(1):\ B\left(0,\frac{r}{\sqrt2}\right)\times B\left(0,\frac{r}{\sqrt2}\right) \subseteq B\left((0,0),r\right)$$

(2): ισχύει: $B(z,r)=\{z : |x-z|<r\}$

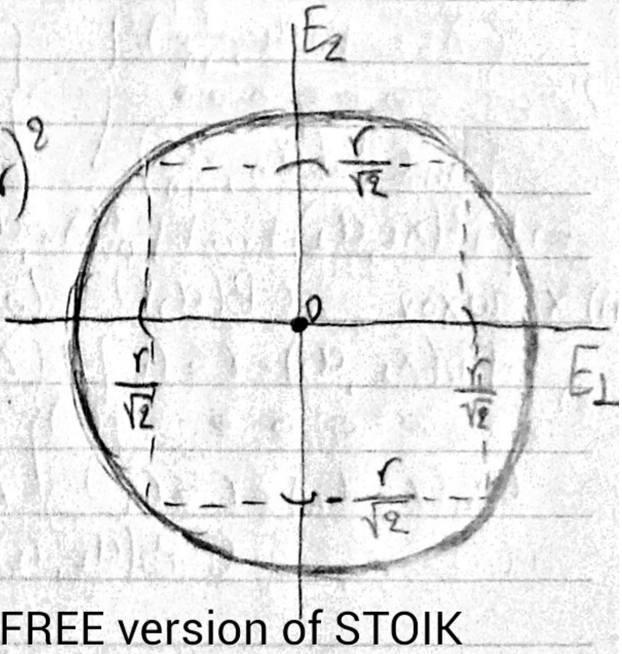
$|x-z|<r \iff -r<x-z<r \iff z-r<x<z+r$



Από (1) & (2) & (3) φτιάχνω το σχήμα:

(3): Παρατηρώ:

$$x^2=\left(2\frac{r}{\sqrt2}\right)^2+\left(2\frac{r}{\sqrt2}\right)^2 = 4\frac{r^2}{2}+4\frac{r^2}{2}=4r^2=(2r)^2$$



(11)

(E,ρ) $\alpha\in E$, $r>0$ ν.δ.ο. $\delta(B(\alpha,r))\leq 2r$

ισχύει: $\delta(A)=\sup\limits_{(x,y)\in A^2}\rho(x,y)$

Θεωρώ x,y εν $B(\alpha,r)$. Τότε $\rho(x,\alpha)<r \wedge \rho(y,\alpha)<r$.

Ισχύει: $\rho(x,y)<\rho(x,\alpha)+\rho(\alpha,y)<r+r=2r$

Το $2r$ είναι άνω φράγμα για το $\rho(x,y)$

άρα $\sup\limits_{(x,y)\in(B(\alpha,r))^2}\rho(x,y)\leq 2r \Longrightarrow \delta(B(\alpha,r))\leq 2r$

Παρατηρώ ότι υπάρχει παράδ. στο οποίο δεν ισχύει η ισότητα.

Στον διακριτό μ.χ.:

$B(\alpha,1)=\{\alpha\}$ (Απο οριστικό σφαιρ. περιοχής του διακριτού μ.χ.)

$\Longrightarrow \delta(B(\alpha,1))=\delta\{\alpha\}$ όμως $\delta(\{\alpha\})=0$ $\Longrightarrow \delta(B(\alpha,1))=0<2=2\cdot 1$

άρα εδώ ισχύει $\delta(B(\alpha,1))<2\cdot r\neq 2\cdot r$

ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Ν.δ.ο. $\delta(B(0,1))=2$ στον $(\mathbb{R},|\,|)$ ευκλ. μετρικό χώρο.

Θεωρώ E διαν. χώρο με N στάθμη

$\rho(x,y)=N(x-y)$

Ν.δ.ο. αν E είναι ένας διαν. χώρος τότε δεν υπάρχει στάθμη N σε αυτόν που να παράγει την διακριτή μετρική

Απόδειξη

Έστω υπάρχει N στάθμη που να παράγει την διακριτή μετρική τότε $N(x-y)=\rho(x,y)$.

Έστω $x\in E$ με $x\neq 0$ άρα $\rho(x,0)=N(x)=1$ $(*)$

Θεωρώ α τυχόν με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ $\xrightarrow{x\neq 0}\alpha\cdot x\neq 0 \xrightarrow{(*)} N(\alpha x)=1$

$\Longrightarrow |\alpha|\cdot N(x)=1 \xrightarrow{N(x)=1} |\alpha|=1$ ΑΤΟΠΟ

Αποδείχθηκε